Επαναληπτικές μέθοδοι

Η μέθοδος της διχοτόμησης και η μέθοδος Regula Falsi που αναφέραμε αξιοποιούσαν το κριτήριο του Bolzano, πραγματοποιώντας διαδοχικές υποδιαιρέσεις του διαστήματος [α, b] στο οποίο, το κριτήριο εγγυόταν την ύπαρξη ρίζας. Είδαμε όμως ότι είναι πιθανό οι μέθοδοι αυτές να συγκλίνουν προς την ρίζα με πολύ αργούς ρυθμούς. Στην συνέχεια θα παρουσιάσουμε άλλες μεθόδους οι οποίες δεν συγκλίνουν πάντα προς την ρίζα, όταν συγκλίνουν όμως, συγκλίνουν πολύ ταχύτερα από τις προηγούμενες μεθόδους. Οι μέθοδοι αυτές είναι γνωστές με τον τίτλο <<*Γενικές επαναληπτικές μέθοδοι*>> και βασίζονται στην εκτίμηση δύο αρχικών τιμών για την μέθοδο της τέμνουσας και μίας αρχικής τιμής για την μέθοδο Newton. Τότε, η γενική επαναληπτική μέθοδος μας δίνει έναν απλό κανόνα σε μορφή συνάρτησης που δημιουργεί μια αναδρομική σχέση απεικόνισης μεταξύ της ν-οστής και της (ν+1)-οστής προσέγγισης της ρίζας της μορφής:

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

η οποία ελπίζουμε ότι θα συγκλίνει προς τη ρίζα. Μέσω της $x_{n+1} = g(x_n)$ υπολογίζονται οι διαδοχικές προσεγγίσεις $x_1, x_2, \ldots x_n$. Σε όλους τους αλγόριθμους των γενικών επαναληπτικών μεθόδων χρησιμοποιούμε ως εκτίμηση της σύγκλισης την απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών εκτιμήσεων x_k, x_{k+1}, και θεωρούμε ότι η μέθοδος συγκλίνει όταν η απόσταση αυτή γίνει μικρότερη από την παράμετρο ακρίβεια λύσης tol που έχει δηλώσει ο χρήστης: $|\, x_{k+1} - x_k \,| < tol$ όπου $tol = \frac{1}{2}10^{-k}$ με k τον αριθμό των δεκαδικών ψηφίων της επιθυμητής ακρίβειας.

Αν δεν ισχύει η συνθήκη τότε δεν έχουμε ακόμα σύγκλιση. Στην περίπτωση αυτή συνεχίζουμε την εκτέλεση της μεθόδου.

Γενική επαναληπτική μέθοδος

Βήμα 1ο) Θεωρούμε μία αρχική εκτίμηση της ρίζας x_1.

Βήμα 2ο) Σε κάθε βήμα k βρίσκεται μία νέα προσέγγιση της ρίζας όπου είναι η τιμή του χ δίνεται από την σχέση:

$$x_{k+1} = g\left(x_k\right)$$

Βήμα 3ο) Αν $f(x_k)=0$ τότε το x_k είναι η ζητούμενη ρίζα και σταματάει η διαδικασία. Αυτή η περίπτωση όμως σπάνια συμβαίνει στην πράξη.

Βήμα 4ο) Επιστρέφουμε στο 2ο βήμα και επαναλαμβάνουμε την διαδικασία για να βρούμε τη νέα προσέγγιση x_{k+1}, μέχρι να εκπληρωθεί ένα από τα κριτήρια τερματισμού.

Κριτήρια τερματισμού:

- Όταν η απόλυτη τιμή της διαφοράς μεταξύ δύο διαδοχικών εκτιμήσεων x_k, x_{k-1}, είναι μικρότερη από την ακρίβεια λύσης tol που έχει δηλώσει ο χρήστης, τότε θεωρούμε ότι η μέθοδος συγκλίνει. Επομένως θα ισχύει:
  $$\left| x_k - x_{k-1} \right| < tol$$
- Η τιμή x_k να είναι ρίζα της συνάρτησης $f(x)$, δηλαδή να ισχύει ότι $f(x_k)=0$.
- Οι επαναλήψεις που έχει δηλώσει ο χρήστης για την εύρεση της ρίζας εξαντλήθηκαν.

Η γενική επαναληπτική μέθοδος μπορεί να αποτύχει να συγκλίνει σε δυο περιπτώσεις:

1. Όταν η συνάρτηση $g(x)$ απειρίζεται.

2. Όταν η συνάρτηση $g(x)$ ταλαντώνεται .

<u>Συνοπτικά Πλεονεκτήματα – Μειονεκτήματα μεθόδου</u>

<u>Πλεονέκτημα:</u>

1) Είναι η βασική επαναληπτική μέθοδος.

<u>Μειονεκτήματα:</u>

1) Η μέθοδος είναι επιρρεπής σε ταλαντώσεις.

2) Δεν υπάρχει εγγύηση ότι η μέθοδος αυτή θα συγκλίνει.

3) Απαιτεί ανώτερες μαθηματικές γνώσεις για την σωστή επιλογή της συνάρτησης $g(x)$

<u>Παράδειγμα Γενικής επαναληπτικής μεθόδου</u>

Εφαρμόζουμε τη γενική επαναληπτική μέθοδο για να υπολογίσουμε την ρίζα της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 2x - 5$. Με δεδομένα την αρχική τιμή εύρεσης ρίζας $x_1 = 2$, την παράμετρο επιθυμητής ακρίβειας $e = \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$, και τον μέγιστο αριθμό των επαναλήψεων 100, χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο για την αναδρομική σχέση $x_{k+1} = g(x_k)$.

Ορίζω ως $g(x) = \frac{x^3 - 5}{2}$, άρα η αναδρομική σχέση θα είναι $x_{n+1} = \frac{x_n^3 - 5}{2}$. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι διαδοχικές τιμές των $x_1, x_2, x_3, \ldots$, οι αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης

i	x_i	$f(x_i)$
1	1.5	-4.625
2	-0.8125	-3.911376953125
3	-2.7681884765625	-20.6758843966181
4	-13.1061306748716	-2230.03647132216

5	-1128.12436633595	-1435721678.30148
6	-717861967.275107	-3.699327954902e+026

Ορίζω ως $g(x)=\dfrac{5}{x^2-2}$, άρα η αναδρομική σχέση θα είναι $x_{n+1}=\dfrac{5}{x_n^2-2}$. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι διαδοχικές τιμές των $x_1, x_2, x_3, \ldots$, οι αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης.

i	x_i	$f(x_i)$
1	2.5	5.625
2	1.17647058823529	-5.7246081823733
3	-8.11797752808989	-523.751421161782
4	0.0782453521757018	-5.15601166008246
5	-2.50767641772235	-15.7540224046185
6	1.16592486205227	-5.74691387109927
7	-7.80494851659616	-464.845879352024
8	0.0848648304470428	-5.16911846103756
9	-2.50903508482717	-15.7769506540978
10	1.16407468372009	-5.75074683794174
11	-7.75277779998069	-455.47952365651

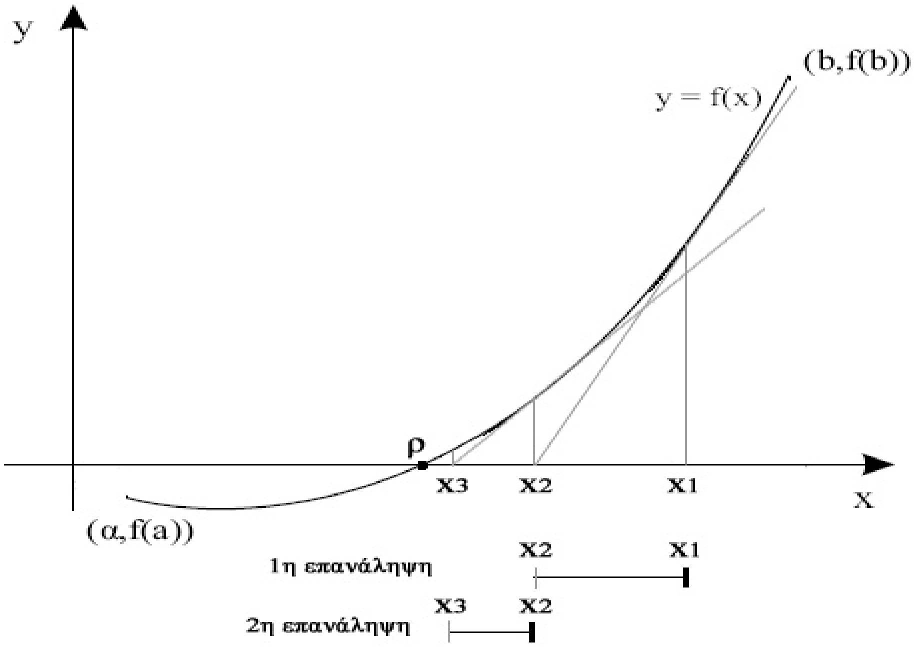
Ορίζω ως $g(x)=\dfrac{5+5x}{x^2+3}$, άρα η αναδρομική σχέση θα είναι $x_{n+1}=\dfrac{5+5x_n}{x_n^2+3}$. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι διαδοχικές τιμές των $x_1, x_2, x_3, \ldots$, οι αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης

i	x_i	$f(x_i)$
1	2.14285714285714	0.553935860058309
2	2.06989247311828	-0.271424100244047

3	2.10715320241416	0.141653189448373
4	2.08811403736145	-0.0715910001540676
5	2.09784078437274	0.0367813703755688
6	2.09287095750336	-0.0187393231027482
7	2.09541012372664	0.00958831462991583
8	2.0941127827328	-0.00489530019663409
9	2.09477562576748	0.00250208751678915
10	2.09443696053242	-0.00127813671138632

Μέθοδος Newton

Η μέθοδος Newton χρησιμοποιεί ευθεία γραμμή για την προσέγγιση της $f(x)$, μόνο που σε αντιδιαστολή με την Regula - Falsi και την τέμνουσα, η ευθεία είναι εφαπτόμενη της $f(x)$. Θεωρώντας ότι η συνάρτηση που μας ενδιαφέρει να υπολογίζουμε τη ρίζα της είναι της μορφής του σχήματος, οι διαδοχικές προσεγγίσεις $x_1, x_2, x_3, \ldots$ μέχρι να υπολογιστεί η ρίζα με την απαιτούμενη από τον χρήστη ακρίβεια υπολογίζονται με τον εξής τρόπο:



Σχήμα: Γεωμετρική ερμηνεία μεθόδου Newton.

Βήμα 1ο) Θεωρούμε μία αρχική εκτίμηση της ρίζας x_1.

Βήμα 2ο) Σε κάθε βήμα k βρίσκεται μία νέα προσέγγιση της ρίζας όπου είναι η τιμή του χ για την οποία η εφαπτόμενη τέμνει τον χ-άξονα και δίνεται από την σχέση:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Η αναδρομική σχέση της μεθόδου Newton υπολογίζεται ως εξής: έστω x_1 η αρχική εκτίμηση της ρίζας, τότε η εξίσωση της εφαπτόμενης της $f(x)$ στο σημείο x_1 δίνεται από τον τύπο:

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

Η ευθεία της εφαπτομένης τέμνει τον χ-άξονα σε ένα σημείο x_1 το οποίο βρίσκεται αν θέσουμε $x = x_2$ και $y = 0$ στην εξίσωση. Έχουμε τότε:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Όπου είναι ακριβώς η $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ για $k = 1$.

Βήμα 3ο) Αν $f(x_k) = 0$ τότε το x_k είναι η ζητούμενη ρίζα και σταματάει η διαδικασία. Αυτή η περίπτωση όμως σπάνια συμβαίνει στην πράξη.

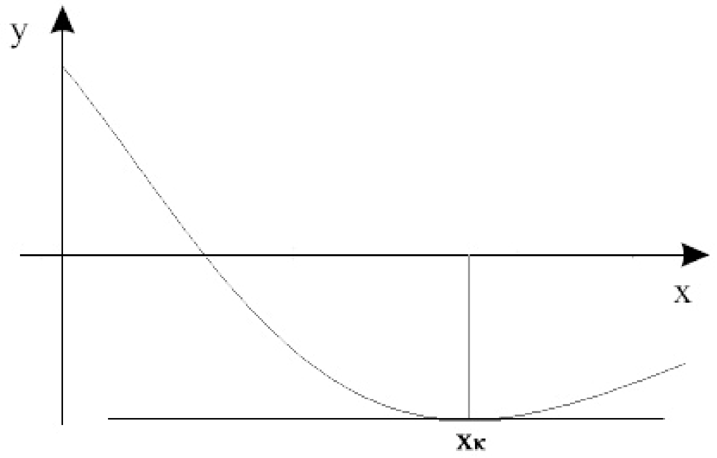
Βήμα 4ο) Επιστρέφουμε στο 2ο βήμα και επαναλαμβάνουμε την διαδικασία για να βρούμε τη νέα προσέγγιση x_{k+1}, μέχρι να εκπληρωθεί ένα από τα κριτήρια τερματισμού.

<u>Κριτήρια τερματισμού:</u>

- Όταν η απόλυτη τιμή της διαφοράς μεταξύ δύο διαδοχικών εκτιμήσεων x_k, x_{k-1}, είναι μικρότερη από την ακρίβεια λύσης tol που έχει δηλώσει ο χρήστης, τότε θεωρούμε ότι η μέθοδος συγκλίνει. Επομένως θα ισχύει: $|\, x_k - x_{k-1} \,| < tol$
- Η τιμή x_k να είναι ρίζα της συνάρτησης $f(x)$, δηλαδή να ισχύει ότι $f(x_k) = 0$.
- Οι επαναλήψεις που έχει δηλώσει ο χρήστης για την εύρεση της ρίζας εξαντλήθηκαν.

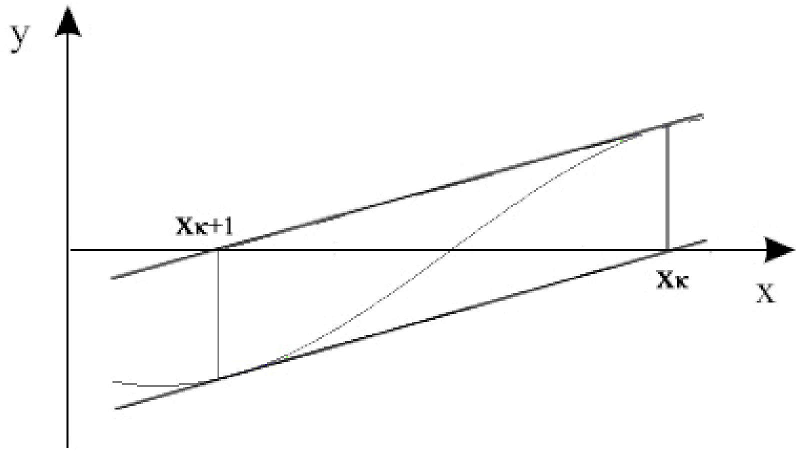
<u>Η μέθοδος Newton μπορεί να αποτύχει να συγκλίνει σε τρεις περιπτώσεις:</u>

1) Όταν η παράγωγος σε κάποια επανάληψη μηδενιστεί Σχ.(5). Τότε δεν είναι πλέον δυνατός ο προσδιορισμός του x_{k+1}.



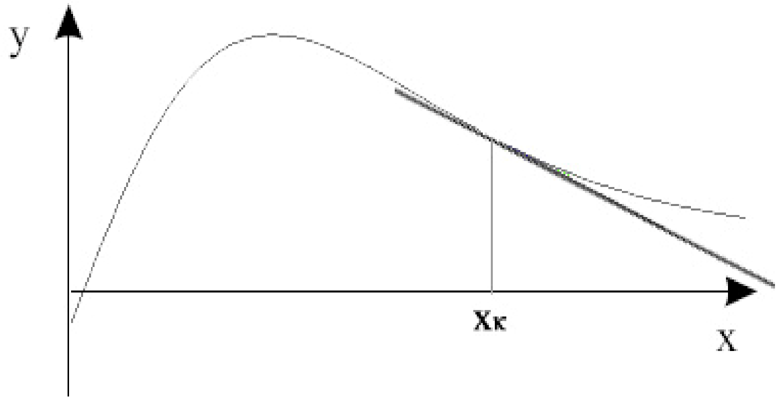
Σχήμα (5): Περίπτωση αποτυχίας της εφαρμογής της μεθόδου Newton όταν η παράγωγος της συνάρτησης μηδενίζεται.

2) Όταν η συνάρτηση αλλάζει πρόσημα σε δύο σημεία π.χ. τα x_k και x_{k+1}, ενώ η παράγωγος της στα σημεία αυτά έχει την ίδια τιμή Σχ.(6). Σε αυτή την περίπτωση, η μέθοδος Newton εισέρχεται σε ένα κλειστό βρόχο από τον οποίο δεν μπορεί να εξέλθει παρά μόνο όταν εξαντληθούν οι επαναλήψεις που έχει δηλώσει ο χρήστης για την εύρεση της ρίζας.



Σχήμα (6): Περίπτωση αποτυχίας της εφαρμογής της μεθόδου Newton όταν εισέρχεται σε κλειστό βρόχο.

3) Όταν η συνάρτηση προσεγγίζει ασυμπτωτικά το 0 και έχει γίνει λανθασμένη επιλογή αρχικού σημείου. Σ' αυτή την περίπτωση η μέθοδος Newton μπορεί να απομακρύνεται από την ρίζα της συνάρτησης Σχ.(7).



Σχήμα (7): Περίπτωση αποτυχίας της εφαρμογής της μεθόδου Newton όταν η συνάρτηση προσεγγίζει ασυμπτωτικά το 0 και γίνει λανθασμένη επιλογή του αρχικού σημείου.

<u>Συνοπτικά Πλεονεκτήματα – Μειονεκτήματα μεθόδου</u>

<u>Πλεονέκτημα:</u>

1) Στις περισσότερες συναρτήσεις είναι και η πιο γρήγορη.

<u>Μειονεκτήματα:</u>

1) Η μέθοδος είναι επιρρεπής σε ταλαντώσεις.

2) Δεν υπάρχει εγγύηση ότι η μέθοδος αυτή θα συγκλίνει.

3) Απαιτεί σε κάθε ρίζα, η παράγωγος να είναι μη μηδενική, αλλιώς η μέθοδος αποτυγχάνει. Αν μηδενιστεί, τότε τείνει στο άπειρο η προσεγγιστική ρίζα και δεν μπορούμε να την επαναφέρουμε.

4) Είναι απαραίτητος ο υπολογισμός της παραγώγου.

Παράδειγμα Newton

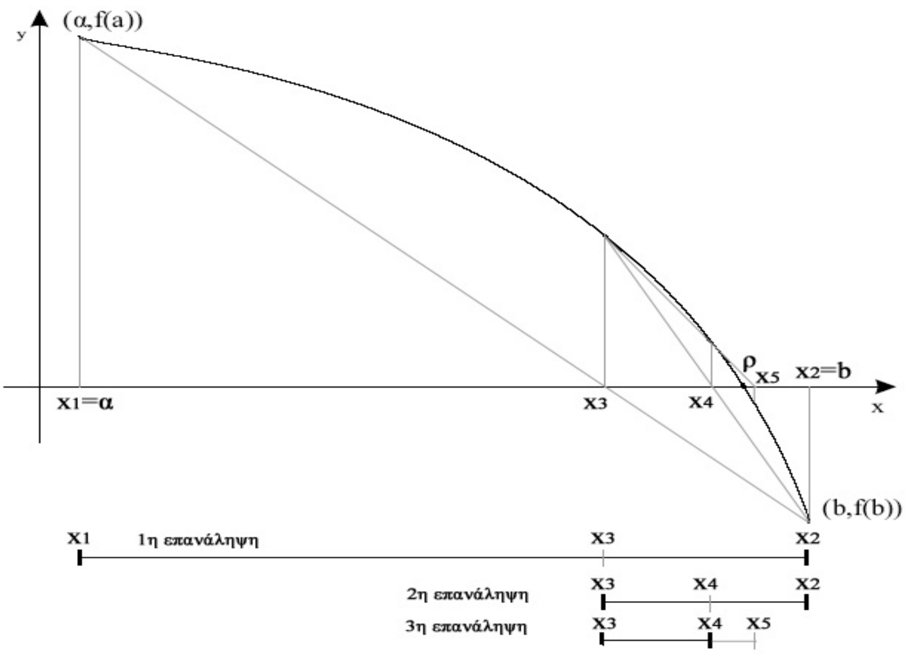
Εφαρμόζουμε τη μέθοδο Newton για να υπολογίσουμε την ρίζα της Εξ.(2.3) $f(x)=x^3+x+1$. Με δεδομένα την αρχική τιμή εύρεσης ρίζας $x_1=-1$, την παράμετρο επιθυμητής ακρίβειας $e=10^{-10}$, και τον μέγιστο αριθμό των επαναλήψεων 100, χρησιμοποιούμε το πρόγραμμα όπου βρίσκουμε μετά από 7 επαναλήψεις την προσεγγιστική ρίζα $\rho \approx -0.6823278038$.

Ας δούμε στην συνέχεια τι αποτελέσματα δίνουν οι πέντε πρώτες επαναλήψεις της μεθόδου. Έτσι λοιπόν στον Πίνακα (4) φαίνονται οι τιμές των $x_1, x_2, x_3, \ldots$, οι αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης

i	x_i	$f(x_i)$
1	-1.0000000000	-1.0000000000
2	-0.7500000000	-0.1718750000
3	-0.6860465116	-0.0089410366
4	-0.6823395826	-0.0000282306
5	-0.6823278039	-0.0000000003

Μέθοδος τέμνουσας

Η μέθοδος της τέμνουσας χρησιμοποιεί τις δύο προηγούμενες προσεγγίσεις x_n, x_{n-1} μίας ρίζας προκειμένου να υπολογίσει την επόμενη x_{n+1} προσέγγιση. Θεωρώντας ότι η συνάρτηση που μας ενδιαφέρει να υπολογίζουμε τη ρίζα της είναι της μορφής του Σχ.(6), οι διαδοχικές προσεγγίσεις $x_1, x_2, x_3, \ldots$ μέχρι να υπολογιστεί η ρίζα με την απαιτούμενη από τον χρήστη ακρίβεια υπολογίζονται με τον εξής τρόπο:



Σχήμα(6): Γεωμετρική ερμηνεία μεθόδου της τέμνουσας.

Βήμα 1ο) Επιλέγουμε 2 σημεία x_1, x_2 τέτοια ώστε $f(x_1)\,f(x_2) < 0$ (δεν είναι απαραίτητη προϋπόθεση) δηλαδή υπάρχει ρίζα στο διάστημα (x_1, x_2).

Βήμα 2ο) Υπολογίζουμε ως νέα ρίζα (x_{k+1}), το σημείο τομής της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $(x_{k-1}, f(x_{k-1})), (x_k, f(x_k))$, με τον χ-άξονα και δίνεται από την εξίσωση

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k)$$

Βήμα 3ο) Αν $f(x_k) = 0$ τότε το x_k είναι η ζητούμενη ρίζα και σταματάει η διαδικασία. Αυτή η περίπτωση όμως σπάνια συμβαίνει στην πράξη.

Βήμα 4ο) Επιστρέφουμε στο 2ο βήμα και επαναλαμβάνουμε την διαδικασία για να βρούμε τη νέα προσέγγιση x_{k+1}, μέχρι να εκπληρωθεί ένα από τα κριτήρια τερματισμού.

Κριτήρια τερματισμού:

- Όταν η απόλυτη τιμή της διαφοράς μεταξύ δύο διαδοχικών εκτιμήσεων x_k, x_{k+1}, είναι μικρότερη από την ακρίβεια λύσης tol που έχει δηλώσει ο χρήστης, τότε θεωρούμε ότι η μέθοδος συγκλίνει. Επομένως θα ισχύει:
  $| x_{k+1} - x_k | < tol$
- Η τιμή x_k να είναι ρίζα της συνάρτησης $f(x)$, δηλαδή να ισχύει ότι $f(x_k) = 0$.
- Οι επαναλήψεις που έχει δηλώσει ο χρήστης για την εύρεση της ρίζας εξαντλήθηκαν.

Η μέθοδος δεν απαιτεί έλεγχο για να καθοριστεί η δράση στο επόμενο βήμα (π.χ. να προσδιοριστεί νέο διάστημα εγκλωβισμού της ρίζας). Επίσης δεν υπάρχει εγγύηση ότι θα συγκλίνει, αν όμως συγκλίνει η σύγκλιση θα είναι ταχύτερη από τη μέθοδο Regula - Falsi. Τέλος όσο προχωρούν οι επαναλήψεις, τόσο η μέθοδος της τέμνουσας δημιουργεί ακριβέστερες προσεγγίσεις της ρίζας.

Συνοπτικά Πλεονεκτήματα – Μειονεκτήματα μεθόδου

Πλεονεκτήματα:

1) Μπορούμε να βρούμε την ρίζα ακόμη κι αν δεν βρίσκεται ανάμεσα στις αρχικές τιμές x_1, x_2.

2) Είναι ταχύτερη από την μέθοδο της Regula Falsi.

3) Δεν χρειάζεται ο υπολογισμός της παραγώγου.

Μειονέκτημα:

1) Επειδή η ρίζα δεν εγκλωβίζεται σε διάστημα, δεν υπάρχει εγγύηση ότι η μέθοδος θα συγκλίνει.

Παράδειγμα τέμνουσας

Ομοίως και σε αυτή την περίπτωση έχουμε να υπολογίσουμε την ρίζα της Εξ.(2.3) $f(x) = x^3 + x + 1$ με τη μέθοδο της τέμνουσας. Με δεδομένα τις αρχικές τιμές $x_1 = -1$ και $x_2 = 1$, την παράμετρο επιθυμητής ακρίβειας $e = 10^{-10}$, και τον μέγιστο αριθμό των επαναλήψεων 100, χρησιμοποιούμε το πρόγραμμα όπου βρίσκουμε μετά από 9 επαναλήψεις την προσεγγιστική ρίζα $\rho \approx -0.6823278038$.

Ας δούμε στην συνέχεια τι αποτελέσματα δίνουν οι πέντε πρώτες επαναλήψεις της μεθόδου. Έτσι λοιπόν στον πίνακα φαίνονται οι τιμές των $x_1, x_2, x_3, \ldots$, οι αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης

i	x_i	$f(x_i)$
1	-1.0000000000	-1.0000000000
2	+1.0000000000	+3.0000000000
3	-0.5000000000	+0.3750000000
4	-0.7142857143	-0.0787172012
5	-0.6771084337	+0.0124537144

Πίνακας: Αποτελέσματα 5 πρώτων επαναλήψεων της μεθόδου τέμνουσας